656. 位相幾何學ノ形式化(III)

寺阪　英孝（阪大）

§5. A^{ρ} 即チ A^{acac} ハAガ元來開集合（$A=A^{a}$）ナラバAノ内部ヲ採ルノト同ジデアル、シテ見ルト閉苞ヲ取ル operation ニ似タモノガアッテモヨイ譯デアル、コレガ丁度 A^{acaca} デ、略シテ：

（定義）　A^{acaca} ヲ A^{α} ト書キ，Aノ正則導集合（reguläre Ableitung）ト命名スルコトニスル。

ソノ譯ハ、開集合ノ閉苞ニナッテヰルヤウナ集合ガ Kuratowski ノ所謂 ensemble fermé régulier デ、A^{α} ハ丁度ソウナッテヰルカラデアル。

ソコデ順々ニ ρ ニ就イテノ諸式ヲ調ベテ行クト、先ヅ(13)ノ Kuratowski ノ等式カラ直グニ

$(13)^{\alpha}$　$A^{\alpha\alpha}=A^{\alpha}$

(14)ノ両辺ニ α ヲトルト

$(14)^{\alpha}$　$A\subset B \longrightarrow A^{\alpha}\subset B^{\alpha}$

次ニ(15)カラ a ニヨッテ先ヅ

(i)　$(A+B)^{\alpha}\supset A^{\alpha}+B^{\alpha}$

所ガコノ不等式ハ $\subset$ モ成立スルノデアル、即チ

$$(A+B)^{\alpha}=(A+B)^{acaca}=(A^{ac}B^{ac})^{aca}$$

B^{ac} ハ開集合ナル故、屡々用ヰタ lemma (11) ニヨリ

$$(A^{ac}B^{ac})^{a}\supset A^{aca}B^{ac}.$$

ヨッテ

(ii) $(A+B)^{\alpha} = (A^{ac}B^{ac})^{aca} \subset (A^{acac}+B^{a})^{a} = A^{\alpha}+B^{\alpha}$

コノ式ノ A,B ノ代リニ B^{a}, A^{α} ヲ入レルト

$$(A+B)^{\alpha} = (A+B)^{\alpha\alpha} = (A^{\alpha}+B^{a}) \subset A^{\alpha a}+B^{a\alpha}$$
$$= A^{\alpha}+B^{\alpha}$$

(i), (ii) カラ

(15)$^{\alpha}$ $(A+B)^{\alpha} = A^{\alpha}+B^{\alpha}$

(16) ハソノママ

(16)$^{\alpha}$ $(AB)^{\alpha} \subset A^{\alpha}B^{\alpha}$

サテ 0^{a} ガ 0 ニ等シイト云フ公理

A_4: $0^{a} = 0$

ヲ入レルト

(35) $A^{\alpha} = 0 \rightleftarrows A^{\rho} = 0$

ナル故、粗集合ノ定義トシテ

(N) $A^{\alpha} = 0$

ヲ採用シテモヨイ。又

$$A^{acaca} \subset B^{acaca}$$

ナラバ更ニ ca ヲ施スコト $A^{acacaca} \supset B^{acacaca}$ ナル故、Kuratowski ノ等式ニヨリ $A^{aca} \supset B^{aca}$.

ヨツテ

(36) $A^{\alpha} \subset B^{\alpha} \rightleftarrows A^{\rho} \subset B^{\rho}$

コレヲ使フト (17) —— (34) ノ ρ ノ代リニ α ヲ入レタモノガ全部成立スルコトガ分ルガ、改メテ書クノハ止メテ

(17)$^{\alpha}$, (18)$^{\alpha}$, ... (34)$^{\alpha}$

ノヨウニ節約シテ置ク。

サテ正則導集合 A^{α} ヲ用キテ A^{a} 及ビ A ヲ (4) 式ニヨリ次ノヨウニ分解シテ見ル。

$$(37)\qquad \begin{aligned} A^{a} &= A^{a}A^{\alpha}+A^{a}A^{\alpha c}=A^{\alpha}+A^{a}A^{\alpha c} \\ A &= AA^{\alpha}+AA^{\alpha c} \end{aligned}$$

サウスルト

$$AA^{\alpha c}\subset A^{a}A^{\alpha c}=A^{a}A^{aca\cdot cac}\subset A^{a}A^{aca}$$

ダカラ, $(21)^{\alpha}$ (即チ (21) ノ ρ ノ代リニ α ヲ置イタモノ) カラ

$$(AA^{\alpha c})^{\alpha}=(A^{a}A^{\alpha c})^{\alpha}=0$$

即チ (37) ノ後半分ハ粗集合デアル、 $(18)^{\alpha}$ ヲ用キレバ

$$A^{\alpha}=(AA^{\alpha}+AA^{\alpha c})^{\alpha}=(AA^{\alpha})^{\alpha}$$

即チ (37) ニヨツテ A^{a} 並ビニ A ガ密ナ部分ト粗ナ部分トニ分タレタコトニナル。 A^{a} ノ場合ニハ、コノ密ナ部分ハ正則閉集合デアル。{(37) ハ ρ デヤツテモ同ジヤウニ成立スル}

§6. 今迄ハ有限個ノ集合ノ結合許リ取扱ツテ来タガ、無限個ノ集合ノ場合ハ如何シタラヨイカ、今コヽニ集合系 $\{A\}=\mathfrak{A}$ ガ與ヘラレタトキ $\sum_{A\in\mathfrak{A}}A$, $\prod_{A\in\mathfrak{A}}A$ ハ A ガ点集合ナラ普通ノ定義デヨイガ、形式的ノ集合ノ場合ニハ定義モ形式的ニ與ヘナケレバ應用出来ナイ。ソコデ O. Ore (On the foundation of abstract algebra I Ann. of Math. Vol. 36, 1935) ニ從ツテ次ノヨウニ定義スル。(V. Neumann: Continuous geometry 参照)

$$\mathfrak{A}=\{A\} \text{ ニ對シテ } \sum_{A\in\mathfrak{A}}A,\ \prod_{A\in\mathfrak{A}}A \quad (\text{略シテ } \sum A,\ \prod A)$$

ナル集合ガ夫々唯一ツ對應シ

Σ_1: $A \subset \Sigma A$ （A 任意 $\in \mathfrak{A}$）

Σ_2: $A \subset X \to \Sigma A \subset X$ （X 固定）

及ビ

Π_1: $\Pi A \subset A$

Π_2: $X \subset A \to X \subset \Pi A$

デアルトスル。

$\mathfrak{A}$ ガ $\{A, B\}$ ノトキハ Σ ハ $A+B$, Π ハ AB トスレバ確カニ $\Sigma_{1,2}$, $\Pi_{1,2}$ ヲ満足スル、可附番個ノ時ハ特ニ $A_1+A_2+\cdots$, $A_1 A_2 \cdots$ ト書クコトモアル。

上ノ定義カラ *de Morgan* ノ式

C_3': $(\Sigma A)^c = \Pi A^c$, $(\Pi A)^c = \Sigma A^c$

ガ出セル、例ヘバ初メノ方ヲ証明スルニハ

(i) $\Sigma A \underset{\Sigma_1}{\supset} A \to (\Sigma A)^c \subset A^c \xrightarrow[\Pi_2]{} (\Sigma A)^c \subset \Pi A^c$

(ii) $\Pi A^c \underset{\Pi_1}{\subset} A^c \to (\Pi A^c)^c \supset A \xrightarrow[\Sigma_2]{} (\Pi A^c)^c \supset \Sigma A$

$\longrightarrow \Pi A^c \subset (\Sigma A)^c$

(i), (ii) カラ $(\Sigma A)^c = \Pi A^c$

又開集合ノ Π ハ開集合, 閉集合ノ Σ ハ閉集合トイフコトモ出ル。今 $\{A^a\}$ ヲ開集合 A^a ノ集マリトスレバ

(i) $\Pi A^a \underset{\Pi_1}{\subset} A^a \to (\Pi A^a)^a \subset A^a \xrightarrow[\Pi_2]{} (\Pi A^a)^a \subset \Pi A^a$

(ii) $(\Pi A^a)^a \supset \Pi A^a$ （公理 A_2）

(i), (ii) ヨリ

A_δ: $(\Pi A^a)^a = \Pi A^a$ （開ノ積ハ開）

次ニ $\{U\}$ ヲ開集合 $U=U^{cac}$（即 $U^c=U^{ca}$）ノ集マリトスレバ

$$(\sum U)^c \underset{C_3'}{=} \prod U^c \underset{A_\delta}{=} (\prod{}^c)^a = (\sum U)^{ca}$$

ヨツテ

$$U_\sigma:\quad (\sum U)^{cac} = \sum U \qquad (U=U^{cac})$$ （開ノ和ハ開）

分配律ニツイテハ、一番簡単ナ場合

$$D' \qquad B\sum A = \sum AB$$

デアルガ、更ニ複雑トナツテ $\{A\},\{B\}$------ナル集合系ノ又系統ガアルトキ，各々ノ $\{\ \}$ カラ一ツヅヽ取ツタモノノ積ヲ AB----- トカケバ

$$D'' \qquad (\sum A)(\sum B)\cdots\cdots = \sum AB\cdots\cdots$$

（一般的ニカケバ $\prod\sum A = \sum\prod A$ デアルガ分リ難イカラ D'' ノ形ニカイテオク）D' ハ D'' ノ特別ナ場合デアルガ、イヅレニセヨ公理トシテ採用シナイト計算ガ出来ナイ。

分配律 D' ノ応用トシテハ例ヘバ

(38)　$UA=0$（U ハ開，$A\in\mathfrak{A}$）$\rightarrow U(\sum A)^a=0$

（U ガ $\mathfrak{A}$ ノドレトモ素ナラバ $\mathfrak{A}$ ノ和ノ閉苞トモ素）

（証）　$UA=0 \rightarrow U\sum A = \sum UA = 0$

$$\rightarrow U(\sum A)^a \underset{(11)}{\subset} (U\sum A)^a \underset{A_4}{=} 0 \longrightarrow U(\sum A)^a = 0$$

§7.　コレ丈ケ準備シテ置イテ，*Baire* ノ所謂第一類ノ集合（*l'ensemble de I-re catégorie*）ヲ考ヘヨウ

（定義）　粗集合ノ可附番個ノ和ヲ第一類ノ集合ト称シ N_σ デ表ハス。

I-re catégorie トイフ名ハ Hausdorff ガ farblos ダト云ッテキルヤウニイイ名デハナイ。ムシロ閉集合（Fermé）ノ可附番個ノ和ヲ F_σ ト書クノニナラッテ N_σ（N ハ Non-dense, Nirgends dicht ノ N）トシタ方ガ少クモ覚エ易イ点デ良クハナイカト思フ。

ソコデ A ガ N_σ ダト云フコトヲ $A \in N_\sigma$ デ表ハシ，然ラザルコトヲ $A \bar{\in} N_\sigma$（又ハ $A \in \overline{N}_\sigma$）デ表ハスコトニスル。

N_{σ_1}:　$A \in N_\sigma \longrightarrow AB \in N_\sigma$（héréditaire）

N_{σ_2}:　$A_n \in N_\sigma \ (n = 1, 2, \cdots\cdots) \rightarrow \sum A_n \in N_\sigma$（additive）

ノ二性質ハ定義カラスグ出ル。

サテ、A ナル集合ニツキ $AU \in N_\sigma$ ナルスベテノ開集合 U ヲ考ヘ、ソノ和 $\sum U$ ヲ求メ（$\sum U$ ハ $AU \in N_\sigma$ ナル最大ノ開集合）

$$D(A) = (\sum U)^c = \prod U^c, \quad AU \in N_\sigma$$

トオクト，$D(A) \neq 0$ ナル限リ，$D(A)$ ハ $\bar{\in} N_\sigma$ ナル正則閉集合デ，$A - D(A)$ ガ N_σ トナルコトハ Kuratowski ノ本ニアル。同書デハ更ニ $D(A)$ ノ諸性質ヲ調ベテアルガ $D(A)$ 自身ヨリハ

$$A^p = A + D(A)$$

ヲ考ヘタ方ガ形式的ニハ面白イノデアッテ、A^p ヲ考ヘタ結

果、種々ノ公式ガ A^{α} ニ関スル公式カラ α, p ノ書換ヘダケデ成立スルコトガ判リ、ヒイテハ実函数論ノ諸定理ガソレ等ノ公式ヲ言葉ニ翻譯スルダケノ労力ダケデ得ラレルコトニモナルノデアル。

A^{p} ノ性質ハ $D(A)$ ノ性質カラ導カレルノデ，先ヅ後者ヲ吟味シナケレバナラヌ。*Kuratowski* ノ結果ヲ流用シテモヨイガ、トニカク我々ノ方針デ調べナホスノモ悪クナイト思フカラ、少々面倒デアルガ一歩一歩進ンデ行カウ。形式計算ノミヨリ興味ノナイ人ハズットトバシテモ差支ヘナイ。

先ヅ補助定理トシテ

定理 (*Banach*) $AU \in N_{\sim}$ (U 開) ナルUノ任意ノ和 $\sum U$ ハ亦 $A\sum U \in N_{\sim}$

(証) (*Kuratowski* ノ *Topologie* I 参照)

$AU \in N_{\sim}$ ナラバ $V \subset U$ ナルドンナ V ニツイテモ $AV \in N_{\sim}$ トナル ($N_{\sim_1}$).

ヨッテ $\sum U$ ノ凡テノ U ノ部分開集合ヲ悉ク考ヘルコトニスルト，皆 A トノ積ガ $N_{\sim}$ ニナル．ソコデコノ集合系カラ

$$\{U_{\alpha}\}: \quad U_1, U_2, \text{-------}, U_{\omega}, \text{-------}, U_{\alpha} \text{-------}$$

ナル *transfinite* 個ノモノヲ取出シ

I. $U_{\alpha} \cdot U_{\beta} = 0 \quad (\alpha \neq \beta)$ (互ニ素)

II. U ノドノ部分開集合モ (U_{α}) ノドレカト素デナイ.

(飽和状態ニアリ)

ノヨウニスル。スルト先ヅ $AU_{\alpha} \in N_{\sim}$ 故

III. $AU_\alpha = N_\alpha^1 + N_\alpha^2 + \cdots\cdots + N_\alpha^n + \cdots\cdots$,

（N_α^n ハ 粗）

今

$$\sum_\alpha N_\alpha^n = N_n$$

ト置クト N_n ハ粗デアル。何者、粗デナイトスレバ N_n^a ハ何カ0デナイ開集合Vヲ含マナケレバナラヌ。即チ

$$V \subset N_n^a \qquad (V: 開集合 \neq 0)$$

ヨッテ任意ノ U_α（$\{U_\alpha\}$中ノ）＝ツキ

$$VU_\alpha = VU_\alpha N_n^a = VU_\alpha(\sum N_\alpha^n)^a \underset{(11)}{\subset} (VU_\alpha \sum N_\alpha^n)^a$$
$$\underset{\mathrm{I.III}}{=} (VU_\alpha N_\alpha^n)^a \subset (N_\alpha^n)^a$$

最後ノモノハ粗集合ナル故0以外ノ開集合ヲ含マヌ、ヨッテ

$$VU_\alpha = 0 \quad \therefore \rightarrow V \sum U_\alpha = 0 \underset{(11), A_4}{\longrightarrow} V(\sum U_\alpha)^a = 0$$

故＝

$$V = V \cdot N_n^a \subset V \cdot (\sum U_\alpha)^a = 0$$

コレハ $V \neq 0$ ノ假定＝反スル、即チ N_n ハ粗デアル。

又

$$(\sum U) - \sum U_\alpha = (\sum U)(\sum U_\alpha)^c \subset (\sum U)^a (\sum U_\alpha)^c$$

ハ凡ベテ粗デアル。何者、開集合Vが

$$V \subset (\sum U)^a (\sum U_\alpha)^c$$

ナラバVハ $\sum U$ ノドレカノUト素デナイ（§6, (38)参照）ソレヲUトスレバ $VU \neq 0$. 所が $VU \subset V \subset (\sum U_\alpha)^c$ カラ

$$VU \cdot U_\alpha = 0.$$

コレハⅢニ反スル。

以上ニヨッテ

$$A\sum U = A\sum U_\alpha + A(\sum U)(\sum U_\alpha)^c$$

$$= \underset{(粗)}{\sum N_n} + \underset{(粗)}{N} \in N_\sigma \quad (以上)$$

サテ D(A) ハ定義ニヨッテ $AU\in N_\sigma$ ナル凡テノ U ノ和 $\sum U$ ニ対スル $(\sum U)^c$ デアッタ、所ガ $\sum U$ ハ開集合ノ和ダカラ開集合デアリ、又 Banach ノ定理カラ $A(\sum U)\in N_\sigma$ トナル。従ッテ $\sum U$ ハ $AU\in N_\sigma$ ナル最大ノ開集合デアル、即チ

(39) $D(A)=U^c$ （U ハ $AU\in N_\sigma$ ナル最大開集合）

先ヅ U ガ正則開集合ナルコトヲ証明シテ置ク必要ガアル。

(40) $U = U^{acac}$

(証) (i) 一般ニ $UU^{ac}=0 \underset{(11)}{\longrightarrow} UU^{aca}=0 \sim U\subset U^{acac}$

(ii) $U^{acac} \underset{(4)}{=} U^{acac}U + U^{acac}U^c \underset{(i)}{=} U + U^\rho U^c$

ココニ $(U^\rho U^c)^\rho \underset{(22)}{=} (UU^{ac})^\rho = 0$ ダカラ $U^\rho U^c$ ハ粗デアル。ヨッテ

$$AU^{acac} = AU + A\cdot U^\rho U^c \in N_\sigma$$

$AU\in N_\sigma$ ノ最大性カラ

$$U^{acac}\subset U.$$

(i) & (ii) $\rightarrow$ $U = U^{acac}$

U ガ正則開集合ナラ U^c 即チ D(A) ハ正則閉集合ニナル。即

テ D(A) ハ内部 $D(A)^{cac}$ ノ閉包ニナル、式デ書ケバ、D(A) ハ元々閉集合ダカラ次ノヨウニナル。

(41) $D(A) = D(A)^{\alpha}$

証明ハ (40) カラ直グダカラ略ス。

D(A) ハ更ニ D ヲ取ッテモ変ラヌ。

(42) $D(D(A)) = D(A)$

(証) $D(A) = U^c$, (a): $AU \in N_\sigma$ ノ最大開 U.

$D(D(A)) = V^c$, (b): $D(A)V = U^cV \in N_\sigma$ ノ最大開ナル V.

ノ二ツヲ劈頭ニ掲ゲテオイテ，扨テ

(i) $AV = AV(U+U^c) = AU\cdot V + A\cdot U^cV \underset{(a)(b)}{\in} N_\sigma$

$$\xrightarrow[(a)]{} V \subset U$$

(ii) $U^cU \in N_\sigma$ ハ明カニ成立スルカラ (b) ノ性質ニヨリ $U \subset V$

(i) & (ii) $\rightarrow V = U$. $\sim$ $D(D(A)) = D(A)$

D(A) ハ又加法定理ヲ満足スル。

(43) $D(A+B) = D(A) + D(B)$

(a) $\begin{cases} D(A+B) = U^c \\ (A+B)U \in N_\sigma \\ \text{(最大)} \end{cases}$ (b) $\begin{cases} D(A) = U_1^c \\ AU_1 \in N_\sigma \\ \text{(最大)} \end{cases}$

(c) $\begin{cases} D(B) = U_2^c \\ BU_2 \in N_\sigma \\ \text{(最大)} \end{cases}$

ノ三性質カラ $U = U_1 U_2$ ヲ出セバ $U^c = U_1^c + U_2^c$. 従ッテ等式ガ出ル。

$$(\mathrm{i})\quad \left.\begin{array}{l} (A+B)U \in N_\sigma \xrightarrow[N_{\sigma_1}]{} AU \in N_\sigma \xrightarrow[(b)]{} U \subset U_1 \\ (A+B)U \in N_\sigma \rightarrow BU \in N_\sigma \xrightarrow[(c)]{} U \subset U_2 \end{array}\right\} \rightarrow U \subset U_1 U_2$$

$$(\mathrm{ii})\quad AU_1 \in N_\sigma,\ BU_2 \in N_\sigma \rightarrow (A+B)U_1U_2 = AU_1 \cdot U_2 + BU_2 \cdot U_1 \in N_\sigma \xrightarrow[(a)]{} U_1U_2 \subset U$$

(i) & $(\mathrm{ii}) \rightarrow U = U_1 U_2$ (以上)

有限個デナク可附番個ノ和ニ対シテハ次式ガ先ヅ成立スル。

$$(44)\quad D(A_1+A_2+\cdots\cdots+A_n+\cdots\cdots) = (D(A_1)+D(A_2)+\cdots\cdots)^a$$

(証) $D(A_1+A_2+\cdots\cdots) = U^c$: (a) U ハ $(A_1+A_2+\cdots\cdots)U \in N_\sigma$ ナル最大開集合

$D(A_n) = U_n^c$: (n) U_n ハ $A_nU_n \in N_\sigma$ ナル最大開集合

ソウスルト

$$(\mathrm{i})\quad (A_1+A_2+\cdots\cdots)U \in N_\sigma \rightarrow A_nU \in N_\sigma \xrightarrow[(n)]{} U \subset U_n \rightarrow U \subset \prod U_n \rightarrow U \subset (\prod U_n)^{cac}$$

$$(\mathrm{ii})\quad A_nU_n \in N_\sigma \rightarrow (A_1+A_2+\cdots\cdots)\prod U_n \in A_1U_1+A_2U_2+\cdots\cdots \underset{N_{\sigma_2}}{\in} N_\sigma \xrightarrow[(a)]{} (\prod U_n)^{cac} \subset U$$

(i) & $(\mathrm{ii}) \rightarrow U = (\prod U_n)^{cac} \rightarrow U^c = (U_1^c+U_2^c+\cdots\cdots)^a$.—

(44)ニヨッテ $D(\sum A_n) \supset \sum D(A_n)$ ガ判ッタカラ，ソノ差ヲ調ベテ見ルト，丁度粗集合ダケノ違ヒガアルノ

デアル。即チ

(45) $D(A_1+A_2+\cdots\cdots A_n+\cdots\cdots)=D(A_1)+D(A_2)+\cdots\cdots$

$$\cdots\cdots+D(A_n)+\cdots\cdots+N,\qquad N=\text{粗}.$$

(証) $D(A_n)$ ハ (41) ニヨリ，ソノ内部ノ閉苞ニナッテキルカラ $D(A_n)^{cac}=U_n$ トオケバ

$$D(A_n)=U_n^a$$

サテ開集合 U_n ニツイテハ一般ニ

$$(U_1+U_2+\cdots\cdots)^a\supset U_n^a\underset{\Sigma_2}{\longrightarrow}(U_1+U_2+\cdots\cdots)^a\supset(U_1^a+U_2^a+\cdots\cdots)^a$$

明カニ $\subset$ モ成立スルカラ

$$(U_1+U_2+\cdots\cdots)^a=(U_1^a+U_2^a+\cdots\cdots)^a$$

サテ (44) ニヨリ

$$D(A_1+A_2+\cdots\cdots)=(D(A_1)+D(A_2)+\cdots\cdots)^a=(U_1^a+U_2^a+\cdots)^a$$

ナル故

$$D(A_1)+D(A_2)+\cdots\cdots=U_1^a+U_2^a+\cdots\cdots$$

トノ差ヲツクルト

$$(U_1^a+U_2^a+\cdots\cdots)^a(U_1^a+U_2^a+\cdots\cdots)^c\subset(U_1^a+U_2^a+\cdots)^a(U_1+U_2+\cdots)^c$$

$$=(U_1+U_2+\cdots\cdots)^a(U_1+U_2+\cdots\cdots)^c$$

$U_1+U_2+\cdots\cdots$ ハ開ナル故コノ右辺ハ粗集合デアル．ヨッテ (45) ヲ得ル。———

以上ノ $D(A)$ ノ性質カラ A_1, A_2, A_3 ナル閉苞ノ公理ト同型ノ

$$A^{pp}=A^p,\quad A\subset A^p,\quad (A+B)^p=A^p+B^p$$

ガ出、従ッテ a ノ代リニ p ヲオイタ式ガ悉ク成立スルノデ

アル。

次ニハ A^{pcpcp} ガ何デアルカヲ調べ，propriété de Baire 等ノコトヲ論ジヨウ。